Signaux Aléatoires - Récapitulatif

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Rappels de TSD

TF$[\cos(\omega_0 t)]$ **:** $\frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

TF$[\sin(\omega_0 t)]$ **:** $\frac{1}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

Moments d'une variable aléatoire

Moment d'ordre m : $\mu_m = \mathbb{E}[X^m]$

Moment centré : $\mu_m^c = \mathbb{E}[(X^c)^m] = \mathbb{E}[(X-\mu)^m]$

Statistiques

Moment d'ordre k : $\mu_{k,X}[n] = \mathbb{E}[X_n^k]$

Moment centré : $\mu_{k,X}^c[n] = \mathbb{E}[(X_n^c)^k]$

Variance : $\sigma_X^2[n] = \mathbb{E}[(X_n - \mu_X[n])^2] = \mu_{2,X}^c[n]$

Statistiques à 2 v.a.

Moments à 2 v.a : $\mathbb{E}[X^p Y^q] = \int_{\mathbb{R}^2} x^p y^q f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Corrélation : $\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Covariance : $\mathrm{Cov}(X_n, Y_m) = \mathbb{E}[(X_n^c)(Y_m^c)]$

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}[X^c Y^c]}{\sqrt{\mathbb{E}\left[(X^c)^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[(Y^c)^2\right]}}$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \iff$ non corrélées

Auto/Inter corrélation et covariance

Autocor : $r_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}^*]$

Autocov : $c_{XX}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1}^c X_{t_2}^{c*}] = r_{XX}(t_1,t_2) - \mu_{1,X}\mu_{1,X}^*$

Au même instant : $r_{XX}(t,t) = \mu_{2,X}(t)$ et $c_{XX}(t,t) = \sigma_X^2$

Intercorr : $r_{XY}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1} Y_{t_2}^*]$

Intercov : $c_{XY}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1}^c Y_{t_2}^{c*}] = r_{XY}(t_1,t_2) - \mu_{1,X}\mu_{1,Y}^*$

Stationnarité

I.I.D : Toutes les v.a. sont indés et suivent la même loi

S.S.S : Toutes les stats de tous les ordres sont constantes

S.S.L : Moments d'ordre 1 constants ; moments d'ordre 2 constants et finis ; $c_{XX}(t_1, t_1+\tau) = c^s_{XX}(\tau)$

Densité spectrale de puissance

DSP : TF de l'autocorrélation :

$$\hat{R}^s_{XX}(\nu) = \text{TF}[r^s_{XX}[m]] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^s_{XX}[m]e^{-j2\pi\nu m}$$

Puissance d'une suite :

$$P_X = r^s_{XX}[0] = \int_{-0.5}^{0.5} \hat{R}^s_{XX}(\nu)d\nu = \sigma_X^2 + \mu_{1,X}^2$$

Ergodicité

Ergo ordre n : Valeurs temporelles d'ordre 1 à n égales aux valeurs statistiques

Ergo stricte : Ergo à tous les ordres

Ergo forte : Moyenne temporelle existe et est constante

Filtrage

Situation : Entrée S.S.L et E.B.S.B, filtre LIT

Moyenne : $\mu_Y = \mu_X \sum_m h[m] = \mu_X \widehat{H}(0)$

DSP : $\widehat{R}^s_{Y_1Y_2}[f] = \widehat{H}_1(f)\widehat{R}^s_{X_1X_2}[f]\widehat{H}^*_2(f)$

Autocorrélation : $r_{YY} = h * r_{XX} * h^{(-)*}$

Interférences : $r_{Y_1Y_2} = h_1 * r_{X_1X_2} * h_2^{(-)*}$

Implications stabilité : Si $r_{XX}[n, n+\tau] = r^s_{XX}[\tau]$ alors $r_{YY}[n, n+\tau] = r^s_{YY}[\tau]$

Implications S.S.L : Si X est S.S.L alors Y est S.S.L et $r^s_{YY}[\tau] = h * r^s_{XX}[\tau] * h^{(-)*}$

Filtrage adapté : Maximise le SNR

Bruits

Bruit blanc : S.S.L, centré, toutes les v.a. sont décorrelées

Bruit blanc gaussien : I.I.D, centré, $\forall n, X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$